**Exercício 73 (capítulo 5 do livro):** Uma fábrica em início de actividade sabe que minimiza os seus custos unitários se conseguir uma produção diária de, pelo menos, 300 unidades. Admita ser de 0.3 a probabilidade de não atingir este nível de produção.

(a) Em 100 dias de laboração qual a probabilidade de não atingir tal nível em mais de 20 e no máximo em 40 dias.

**Solução:** Seja $X_i$ a variável aleatória que se define da seguite forma

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se uma produção de 300 unidades não é atingida no dia } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, $X_i$ é tal que $X_i \sim B(1, 0.3)$. Assumindo que as variáveis aleatórias $X_i$ são independentes, a variaável aleatória

$$S = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, 0.3)$$

Utilizando um software adequado para fazer os cálculos podemos obter

$$P(20 < S \leq 40) = P(21 \leq S \leq 40) = 0.9710.$$

Podemos também considerar a aproximação à normal uma vez que estamos a somar um número de variáveis aleatórias suficentemente grande:

$$S = \sum_{i=1}^{100} X_i \overset{a}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

onde $\mu = 100 \times 0.3$ e $\sigma^2 = 100 \times 0.3 \times 0.7 = 21$. A probabilidade requerida é

$$P(21 \leq S \leq 40) = P\left(\frac{21 - 30}{\sqrt{21}} \leq Z \leq \frac{40 - 30}{\sqrt{21}}\right)$$

onde $Z = \frac{X-30}{\sqrt{21}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$. Aplicando a correcção de continuidade temos que

$$\begin{aligned}
P(21 &\leq S \leq 40) = \Phi\left(\frac{40-30+1/2}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{21-30-1/2}{\sqrt{21}}\right) \\
&\simeq \Phi(2.29) - \Phi(-2.07) \\
&= \Phi(2.29) + \Phi(2.07) - 1 \\
&= 0.9890 + 0.9808 - 1 = 0.9698
\end{aligned}$$

(b) Sendo $n = 20$, e $Y$, a variável aleatória que representa o número de dias em que a produção é inferior a 300 unidades, compare as probabilidades exacta e aproximada do acontecimento dado pela condição $12 \leq Y \leq 16$.

**Solução:** A variável aleatória $Y$ segue uma distribuição do tipo binomial

$$Y \sim B(20, 0.3)$$

Então a probabilidade exacta é dada por

$$P(12 \leq Y \leq 16) = P(11 < Y \leq 16) = F_Y(16) - F_Y(11) = 0.0051.$$

Recorrendo à aproximação à normal temos que

$$Y \overset{a}{\sim} N(6, 4.2)$$

Aplicando a correcção de continuidade temos

$$\begin{aligned}
P(12 &\leq Y \leq 16) = \Phi\left(\frac{16-6+1/2}{\sqrt{4.2}}\right) - \Phi\left(\frac{12-6-1/2}{\sqrt{4.2}}\right) \\
&\simeq \Phi(5.12) - \Phi(2.68) \\
&= 1 - 0.9963 = 0.0037.
\end{aligned}$$